

with complex boundary: R- functions methods and experiments, J. of Sound and Vibration 306, 580-600. **11.** Кубенко В.Д., Ковальчук П.С. Нелинейные проблемы колебаний тонких оболочек (обзор) // Прикладная механика. – Киев. – 1998. – № 34. – С. 703-728. **12.** Leissa A.W. 1993 Vibrations of shells. NASA SP-288. Washington, DC: Government Printing Office; Now available from Acoustical Society of America. **13.** Власов В.З. Избранные труды, Т. 1. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 528 с. **14.** Avramov K.V., Pellicano F., 2007, Linear and nonlinear dynamics of a circular cylindrical shell connected to a rigid disk. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations 12, 496-518. **15.** Avramov K.V., Mikhlin Yu. V. Kurilov G., 2007, Asymptotic analysis of nonlinear dynamics of simply supported cylindrical shells. Nonlinear Dynamics 47, 331-352.

Поступила в редколлегию 12.05.2008.

УДК 539.3

С.М.ВЕРЕЩАКА, канд.техн.наук, Сумской государственнй университет

УПРУГИЕ ПОСТОЯННЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЖЕСТКОСТИ МАТЕРИАЛА СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЫ

Наданий аналіз методів визначення пружних характеристик окремих шарів армованих високо модульними волокнами на макрорівні. У випадку, коли композит уявляє собою набір шарів з різними напрямками армування, запропонована методика визначення приведених пружних характеристик і компонент матриці жорсткості всього пакету шарів у цілому. Порівняння теоретичних і експериментальних результатів, а також аналіз даних, наведених у вже відомих публікаціях, підтверджує коректність запропонованої методики.

The analysis of the methods of definition of elastic characteristics of separate layers reinforced by high-module fibers on the macro level is given. In the case, when the composite itself represents a set of layers with different directions of reinforce, the technique of the given elastic characteristics definition and component of matrixes of rigidity of all layers' package as a whole is offered. Comparison of theoretical and experimental results, and also the analysis of data, given in the already known publications, confirms the correctness of the offered technique.

При проектировании конструкций из композиционных материалов, как правило, рассматривается несколько возможных вариантов и схем армирования. Поэтому задача выбора оптимального варианта армирования таких материалов при минимальных затратах на эксперимент представляется весьма актуальной.

В композиционном материале с регулярной структурой, как правило, присутствуют повторяющиеся элементы в виде однонаправленных слоев. Пренебрегая неоднородностью структуры на микроуровне каждого слоя, можно найти эффективные характеристики отдельных слоев на макроуровне. При этом деформационная модель материала имеет квазиоднородную структуру.

Анализ различных подходов [1-6] к расчету упругих характеристик композиционного материала показывает, что корректную оценку влияния схем укладки арматуры на физико-механические характеристики материала можно

получить, решая граничные задачи теории упругости для многосвязной области. Однако такой расчет не исключает погрешностей, обусловленных отклонением реальной структуры материала от ее идеализированной модели, и связан с трудоемким численным анализом.

В основу приближенного расчета упругих характеристик композиционных материалов положен принцип суммирования повторяющихся элементарных слоев. Упругие характеристики элементарного слоя, как правило, определяются в два этапа. Вначале находятся характеристики приведенной матрицы за счет усреднения упругих свойств волокон ортогонально-армированного материала слоя. Считается, что компоненты материала (волокно и матрица) изотропны, линейно упруги и работают совместно на всех этапах деформирования. Кроме того, приняты допущения, согласно которым: не учитываются напряжения, перпендикулярные к волокнам при действии нормальной нагрузки вдоль волокон; поперечные деформации при растяжении – сжатии каждой компоненты пропорциональны ее объемному содержанию в материале; на границе волокно-матрица исключается рассмотрение концентрации напряжения. На втором этапе осуществляется расчет характеристик слоя, исходя из упругих свойств волокон и модифицированной матрицы.

1. Для ортотропного материала расчетные зависимости упругих характеристик армированного высокомодульными волокнами слоя имеют вид:

$$\begin{aligned} E_1^{(k)} &= \psi_1^{(k)} E_\sigma + \frac{(1 - \psi_1^{(k)})(1 + \psi_3^{(k)})}{1 - \psi_1^{(k)}} E_M; & E_2^{(k)} &= \frac{(1 + \psi_1^{(k)})(1 + \psi_3^{(k)})}{(1 - \psi_1^{(k)})(1 - \psi_3^{(k)})(1 - \nu_\sigma^2)} E_M; \\ E_3^{(k)} &= \psi_3^{(k)} E_\sigma + \frac{(1 + \psi_1^{(k)})(1 + \psi_3^{(k)})}{(1 - \psi_1^{(k)})(1 - \nu_\sigma^2)} E_M; & \nu_{12}^{(k)} &= \frac{\nu_\sigma (1 + \psi_3^{(k)})(1 + \psi_1^{(k)})}{\psi_1^{(k)}(1 - \psi_3^{(k)})(1 - \psi_1^{(k)})(1 - \nu_\sigma^2)} \frac{E_M}{E_\sigma}; \\ \nu_{13}^{(k)} &= \nu_\sigma \psi_3^{(k)} + (1 - \psi_3^{(k)}) \nu_M; & \nu_{23}^{(k)} &= \nu_B \psi_3^{(k)} + (1 - \psi_3^{(k)}) \nu_M; \\ G_{12}^{(k)} &= \frac{1 + \psi_1^{(k)}}{(1 - \psi_1^{(k)})(1 + \psi_3^{(k)})} G_M; & G_{23}^{(k)} &= \frac{1 + \psi_3^{(k)}}{(1 - \psi_3^{(k)})(1 - \psi_1^{(k)})} G_M; \\ G_{13}^{(k)} &= \frac{(1 + \psi_1^{(k)})(1 + \psi_3^{(k)})}{(1 - \psi_1^{(k)})(1 - \psi_3^{(k)})} G_M, \end{aligned} \quad (1)$$

где индекс «в» относится к арматуре, «м» – к связующему; $\psi_1^{(k)}$, $\psi_3^{(k)}$ – относительное объемное содержание арматуры слоя в направлении осей 1 и 3 (см. рисунок);

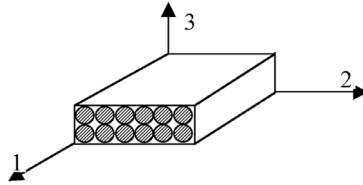
$$G_\sigma = \frac{E_\sigma}{2(1 + \nu_\sigma)}; \quad G_M = \frac{E_M}{2(1 + \nu_M)}; \quad (2)$$

ν_σ , ν_M – коэффициенты Пуассона.

Коэффициент армирования $\psi_1^{(k)}$, характеризующий относительное объемное содержание волокон, можно определить по формуле

$$\psi_1^{(k)} = \frac{\pi (d_\sigma^{(k)})^2}{4h^{(k)}} i_\sigma^{(k)}, \quad (3)$$

где $h^{(k)}$ – толщина армированного слоя; $d_g^{(k)}$ – диаметр волокон; $i_g^{(k)}$ – частота армирования. Геометрия однонаправленно армированного слоя показана на рисунке. Относительное объемное содержание арматуры слоя в направлении оси 3 зависит от диаметра отдельных волокон, частоты армирования $i_g^{(k)}$. Поэтому величина $\psi_3^{(k)}$ определяется при помощи эмпирических зависимостей и, как правило, изменяется в интервале $\psi_3^{(k)} = (0,05 \div 0,15) \psi_1^{(k)}$. Все величины с индексом k относим к k -му слою оболочки.



Соотношения упругости для ортотропного однонаправленно армированного слоя в системе координат 1 2 3 с учетом физико-технических постоянных (1) – (3) в матричной форме имеют вид:

$$\sigma_{(k)} = a_{(k)} \varepsilon_{(k)}; \quad \varepsilon_{(k)} = b_{(k)} \sigma_{(k)}; \quad (4)$$

$$\sigma_{(k)} = [\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{13}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}]^T, \quad \varepsilon_{(k)} = [\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, \varepsilon_{23}^{(k)}, \varepsilon_{13}^{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)}]^T - \text{матрицы} - \text{столбцы напряжений и деформаций слоя (см. рисунок);}$$

$$a_{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^{(k)} & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31}^{(k)} & a_{32}^{(k)} & a_{33}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66}^{(k)} \end{bmatrix}; \quad b_{(k)} = \begin{bmatrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & b_{13}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & b_{23}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ b_{31}^{(k)} & b_{32}^{(k)} & b_{33}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66}^{(k)} \end{bmatrix} -$$

матрицы жесткости и податливости k – го ортотропного слоя.

Компоненты матрицы жесткости $a^{(k)}$ можно выразить через коэффициенты матрицы податливости $b^{(k)}$, решая вторую систему уравнений (4) относительно напряжений $\sigma_{(k)}$:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(k)} &= [b_{22}^{(k)} b_{33}^{(k)} - (b_{23}^{(k)})^2] \Delta_{(k)}^{-1}; & a_{22}^{(k)} &= [b_{11}^{(k)} b_{33}^{(k)} - (b_{13}^{(k)})^2] \Delta_{(k)}^{-1}; \\ a_{33}^{(k)} &= [b_{11}^{(k)} b_{22}^{(k)} - (b_{12}^{(k)})^2] \Delta_{(k)}^{-1}; & a_{12}^{(k)} &= [b_{13}^{(k)} b_{23}^{(k)} - b_{12}^{(k)} b_{33}^{(k)}] \Delta_{(k)}^{-1}; \\ a_{13}^{(k)} &= [b_{12}^{(k)} b_{23}^{(k)} - b_{22}^{(k)} b_{13}^{(k)}] \Delta_{(k)}^{-1}; & a_{23}^{(k)} &= [b_{12}^{(k)} b_{13}^{(k)} - b_{11}^{(k)} b_{23}^{(k)}] \Delta_{(k)}^{-1}; \\ \Delta_{(k)} &= b_{11}^{(k)} b_{22}^{(k)} b_{33}^{(k)} + b_{12}^{(k)} b_{23}^{(k)} b_{31}^{(k)} + b_{21}^{(k)} b_{32}^{(k)} b_{13}^{(k)} - b_{13}^{(k)} b_{22}^{(k)} b_{31}^{(k)} - b_{21}^{(k)} b_{12}^{(k)} b_{33}^{(k)} - b_{11}^{(k)} b_{32}^{(k)} b_{23}^{(k)}; \\ a_{44}^{(k)} &= \frac{1}{b_{44}^{(k)}}; & a_{55}^{(k)} &= \frac{1}{b_{55}^{(k)}}; & a_{66}^{(k)} &= \frac{1}{b_{66}^{(k)}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Коэффициенты податливости $b_{ij}^{(k)}$ можно записать при помощи технических постоянных (1):

$$\begin{aligned}
b_{11}^{(k)} &= \frac{1}{E_1^{(k)}}; \quad b_{12} = -\frac{\nu_{21}^{(k)}}{E_2^{(k)}}; \quad b_{13}^{(k)} = -\frac{\nu_{31}^{(k)}}{E_3^{(k)}}; \quad b_{21} = -\frac{\nu_{12}^{(k)}}{E_1^{(k)}}; \\
b_{22}^{(k)} &= \frac{1}{E_2^{(k)}}; \quad b_{23} = -\frac{\nu_{32}^{(k)}}{E_3^{(k)}}; \quad b_{31}^{(k)} = -\frac{\nu_{13}^{(k)}}{E_1^{(k)}}; \quad b_{32} = -\frac{\nu_{23}^{(k)}}{E_2^{(k)}}; \\
b_{33}^{(k)} &= \frac{1}{E_3^{(k)}}; \quad b_{44} = \frac{1}{G_{23}^{(k)}}; \quad b_{55}^{(k)} = \frac{1}{G_{13}^{(k)}}; \quad b_{66} = \frac{1}{G_{12}^{(k)}}.
\end{aligned}$$

Если тонкостенный элемент состоит из нескольких однонаправлено армированных слоев, оси локальных систем координат которых не совпадают с осями выбранной главной системы координат расчетной модели, что имеет место, например, в перекрестно армированных оболочках, появляется возможность варьировать свойствами материала за счет угла армирования.

Пусть β – угол армирования, то есть угол на который следует повернуть оси локальной системы координат 1, 2 относительно оси 3 (см. рисунок) однонаправлено армированного k -го слоя для совмещения их с осями $\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_2^{(k)}$, z глобальной системы координат многослойного элемента. Известно, что в повернутых осях $\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_2^{(k)}$, z армированный слой обладает анизотропными свойствами и имеет одну плоскость упругой симметрии. Тогда становятся справедливыми соотношения упругости:

$$\sigma_{(k)}^\alpha = a_{(k)}^\beta \varepsilon_{(k)}^\alpha, \quad (6)$$

где

$$a_{(k)}^\beta = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)\beta} & a_{12}^{(k)\beta} & a_{13}^{(k)\beta} & 0 & 0 & a_{16}^{(k)\beta} \\ a_{21}^{(k)\beta} & a_{22}^{(k)\beta} & a_{23}^{(k)\beta} & 0 & 0 & a_{26}^{(k)\beta} \\ a_{31}^{(k)\beta} & a_{32}^{(k)\beta} & a_{33}^{(k)\beta} & 0 & 0 & a_{36}^{(k)\beta} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}^{(k)\beta} & a_{45}^{(k)\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54}^{(k)\beta} & a_{55}^{(k)\beta} & 0 \\ a_{61}^{(k)\beta} & a_{62}^{(k)\beta} & a_{63}^{(k)\beta} & 0 & 0 & a_{66}^{(k)\beta} \end{bmatrix} - \quad (7)$$

матрица коэффициентов жесткости k -го анизотропного слоя в осях главной системы координат $\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_2^{(k)}$, z .

$$\sigma_{(k)}^\alpha = [\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{13}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}]^T; \quad \varepsilon_{(k)}^\alpha = [\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, \varepsilon_{23}^{(k)}, \varepsilon_{13}^{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)}]^T -$$

матрицы-столбцы напряжений и деформаций слоя относительно главной системы координат $\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_2^{(k)}$, z . Коэффициенты матрицы $a_{(k)}^\beta$ выражаются через коэффициенты матрицы $a_{(k)}$ при помощи соотношений [7]:

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(k)\beta} &= a_{11}^{(k)} \cos^4 \beta_{(k)} + 2(a_{12}^{(k)} + 2a_{66}^{(k)}) \sin^2 \beta_{(k)} \cos^2 \beta_{(k)} + a_{22}^{(k)} \sin^4 \beta_{(k)}; \\
a_{22}^{(k)\beta} &= a_{11}^{(k)} \sin^4 \beta_{(k)} + 2(a_{12}^{(k)} + 2a_{66}^{(k)}) \sin^2 \beta_{(k)} \cos^2 \beta_{(k)} + a_{22}^{(k)} \cos^4 \beta_{(k)}; \\
a_{12}^{(k)\beta} &= [a_{11}^{(k)} + a_{22}^{(k)} - 2(a_{12}^{(k)} + 2a_{66}^{(k)})] \sin^2 \beta_{(k)} \cos^2 \beta_{(k)} + a_{12}^{(k)}; \\
a_{33}^{(k)\beta} &= a_{33}^{(k)}; \quad a_{13}^{(k)\beta} = a_{13}^{(k)} \cos^2 \beta_{(k)} + a_{23}^{(k)} \sin^2 \beta_{(k)}; \quad a_{23}^{(k)\beta} = a_{13}^{(k)} \sin^2 \beta_{(k)} + a_{23}^{(k)} \cos^2 \beta_{(k)}; \\
a_{44}^{(k)\beta} &= a_{44}^{(k)} \cos^2 \beta_{(k)} + a_{55}^{(k)} \sin^2 \beta_{(k)}; \quad a_{45}^{(k)\beta} = (a_{44}^{(k)} - a_{55}^{(k)}) \sin \beta_{(k)} \cos \beta_{(k)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{55}^{(k)\beta} &= a_{44}^{(k)} \sin^2 \beta_{(k)} + a_{55}^{(k)} \cos^2 \beta_{(k)}; & a_{36}^{(k)\beta} &= (a_{23}^{(k)} - a_{13}^{(k)}) \sin \beta_{(k)} \cos \beta_{(k)}; \\
a_{66}^{(k)\beta} &= [a_{11}^{(k)} + a_{22}^{(k)} - 2(a_{12}^{(k)} + 2a_{66}^{(k)})] \sin^2 \beta_{(k)} \cos^2 \beta_{(k)} + a_{66}^{(k)}; \\
a_{16}^{(k)\beta} &= [a_{22}^{(k)} \sin^2 \beta_{(k)} - a_{11}^{(k)} \cos^2 \beta_{(k)} + (a_{12}^{(k)} + 2a_{66}^{(k)}) (\cos^2 \beta_{(k)} - \sin^2 \beta_{(k)})] \sin \beta_{(k)} \cos \beta_{(k)}; \\
a_{(k)\beta}^{26} &= [a_{(k)}^{22} \cos^2 \beta_{(k)} - a_{(k)}^{11} \sin^2 \beta_{(k)} - (a_{(k)}^{12} + 2a_{(k)}^{66}) (\cos^2 \beta_{(k)} - \sin^2 \beta_{(k)})] \sin \beta_{(k)} \cos \beta_{(k)}.
\end{aligned}$$

Для дальнейшего изложения материала систему уравнений (6)-(7) удобно представить в виде

$$\sigma_{(k)}^\alpha = a_{(k)\alpha 3}^\beta \varepsilon_{(k)}^\alpha; \quad \sigma_{(k)}^{\alpha 3} = a_{(k)\alpha 3}^\beta \varepsilon_{(k)}^{\alpha 3}, \quad (8)$$

где в (8) введены обозначения:

$$\begin{aligned}
\sigma_{(k)}^\alpha &= [\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}]^T; & \sigma_{(k)}^{\alpha 3} &= [\sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{13}^{(k)}]^T; \\
\varepsilon_{(k)}^\alpha &= [\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)}]^T; & \varepsilon_{(k)}^{\alpha 3} &= [\varepsilon_{23}^{(k)}, \varepsilon_{13}^{(k)}]^T; \\
a_{(k)\alpha}^\beta &= \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)\beta} & a_{12}^{(k)\beta} & a_{13}^{(k)\beta} & a_{16}^{(k)\beta} \\ a_{21}^{(k)\beta} & a_{22}^{(k)\beta} & a_{23}^{(k)\beta} & a_{26}^{(k)\beta} \\ a_{31}^{(k)\beta} & a_{32}^{(k)\beta} & a_{33}^{(k)\beta} & a_{36}^{(k)\beta} \\ a_{61}^{(k)\beta} & a_{62}^{(k)\beta} & a_{63}^{(k)\beta} & a_{66}^{(k)\beta} \end{bmatrix}; & a_{(k)\alpha 3}^\beta &= \begin{bmatrix} a_{44}^{(k)\beta} & a_{45}^{(k)\beta} \\ a_{54}^{(k)\beta} & a_{55}^{(k)\beta} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \quad (9)$$

В случае, когда композит представляет собой набор из n разно ориентированных слоев однонаправленного материала, приведенные упругие характеристики рассматриваемого пакета слоев находят из очевидных соотношений:

$$\sigma^\alpha = a_\alpha^\beta \varepsilon^\alpha; \quad \sigma^{\alpha 3} = a_{\alpha 3}^\beta \varepsilon^{\alpha 3}, \quad (10)$$

где $a_{ij}^\beta = \sum_{k=1}^n a_{ij}^{(k)\beta} h'_{(k)}$, $h'_{(k)} = h_{(k)} / h$ – относительная толщина k -го слоя.

Упругие постоянные многослойного пакета при растяжении можно получить, преобразовав систему уравнений (10) к виду

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= a_{11}^\beta \varepsilon_{11} + a_{12}^\beta \varepsilon_{22} + a_{13}^\beta \varepsilon_{33} + a_{16}^\beta \varepsilon_{12}; \\
0 &= a_{21}^\beta \varepsilon_{11} + a_{22}^\beta \varepsilon_{22} + a_{23}^\beta \varepsilon_{33} + a_{26}^\beta \varepsilon_{12}; \\
0 &= a_{31}^\beta \varepsilon_{11} + a_{32}^\beta \varepsilon_{22} + a_{33}^\beta \varepsilon_{33} + a_{36}^\beta \varepsilon_{12}; \\
0 &= a_{61}^\beta \varepsilon_{11} + a_{62}^\beta \varepsilon_{22} + a_{63}^\beta \varepsilon_{33} + a_{66}^\beta \varepsilon_{12}.
\end{aligned} \quad (11)$$

Подставив выражение

$$E_1 = \sigma_{11} / \varepsilon_{11};$$

в первое уравнение системы уравнений (11) и предварительно выразив деформации ε_{22} , ε_{33} , ε_{12} при помощи ε_{11} , из оставшихся 3-х уравнений (11), несложно найти значение E_1 :

$$E_1 = \frac{\det a_\alpha^\beta}{M_{11}}. \quad (12)$$

В формуле (12) M_{11} – минор элемента a_{11}^β матрицы a_α^β . Аналогично находят остальные значения технических постоянных:

$$E_2 = \frac{\det a_{\alpha}^{\beta}}{M_{22}}; \quad E_3 = \frac{\det a_{\alpha}^{\beta}}{M_{33}} - \quad (13)$$

модули упругости первого рода;

$$G_{12} = \frac{\det a_{\alpha}^{\beta}}{M_{44}}; \quad G_{13} = a_{55}^{\beta} - \frac{(a_{45}^{\beta})^2}{a_{44}^{\beta}}; \quad G_{23} = a_{44}^{\beta} - \frac{(a_{45}^{\beta})^2}{a_{55}^{\beta}} - \quad (14)$$

модули сдвига;

$$\nu_{12} = \frac{M_{12}}{M_{11}}; \quad \nu_{13} = \frac{M_{13}}{M_{11}}; \quad \nu_{23} = \frac{M_{23}}{M_{22}} - \quad (15)$$

коэффициенты Пуассона. Остальные три значения коэффициентов Пуассона ν_{21} , ν_{31} , ν_{32} находятся при помощи известных соотношений

$$\nu_{ij}E_j = \nu_{ji}E_i, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (16)$$

Здесь первый индекс коэффициента Пуассона указывает на направление приложения нагрузки, а второй – направление поперечной деформации, вызванной этой силой.

В качестве примера расчета упругих характеристик перекрестно армированного материала рассматривается углепластик [8, 9], который состоит из 31 слоя с кодом $[0_2^\circ / 90^\circ / 0_2^\circ / \pm 45^\circ / (0_2^\circ / 90^\circ)_2 / \pm 45^\circ / \bar{0}^\circ]_s$, и стеклопластик с продольно-поперечной схемой укладки 19-ти монослоев $[(0^\circ / 90^\circ)_s / \bar{0}^\circ]_s$.

Свойства составляющих композиций:

Углепластик. Согласно паспортным данным модули упругости E_g , сдвига G_g и коэффициент Пуассона ν_g углеродного волокна ЛУ-03 соответственно равны 235000 МПа, 90400 МПа и 0,3. Механические характеристики связующего углепластика (сополимер эпокситрифенольной и анилиноформальдегидной смол) – $E_m = 3500$ МПа; $G_m = 1320$ МПа; $\nu_m = 0,32$. В каждом монослое толщиной 0,171 мм объем, занимаемый волокнами, составляет 55 % общего объема.

Стеклопластик. В качестве матрицы стеклопластика использовался эпоксидный полимер 5-211Б со следующими параметрами упругости: $E_m = 4200$ МПа; $G_m = 1500$ МПа; $\nu_m = 0,4$. Армирующим элементом композиции является ткань сатиновой структуры Т-10-80. Толщина ткани равна 0,25 мм. Плотность ткани по основе составляет 36 ниток/см, по утку – 20 ниток/см. Ткань получена путем переплетения алюмоборосиликатных ниток БС6-26×1×1(Е стекло). Диаметр волокна составляет $6 \cdot 10^{-3}$ мм. Механические характеристики волокна: $E_g = 74800$ МПа; $G_g = 31000$ МПа; $\nu_g = 0,2$. Количество волокон в одной нитке достигает 800 шт. В результате проведенных авторами работ [8, 9] вычислений было показано, что модуль упругости нити равен 74506 МПа, модуль сдвига и коэффициент Пуассона нити может быть принят такими же, как и для волокна.

Величины технических постоянных упругости рассматриваемых многослойных композитов, полученные на основе представленных зависимостей (1) – (16) сведены в табл. 1.

Таблица 1 – Упругие характеристики угле и стеклопластиков

Материал	E_{ij} , МПа	G_{ij} , МПа	ν_{ij}	ν_{ji}
Углепластик	$E_{11} = 84457$	$G_{12} = 12410$	$\nu_{12} = 0,21$	$\nu_{21} = 0,11$
	$E_{22} = 42026$	$G_{13} = 4287$	$\nu_{13} = 0,28$	$\nu_{31} = 0,049$
	$E_{33} = 14703$	$G_{23} = 3677$	$\nu_{23} = 0,3$	$\nu_{32} = 0,1$
Стеклопластик	$E_{11} = 24260$	$G_{12} = 4254$	$\nu_{12} = 0,15$	$\nu_{21} = 0,15$
	$E_{22} = 24260$	$G_{13} = 2947$	$\nu_{13} = 0,42$	$\nu_{31} = 0,17$
	$E_{33} = 9989$	$G_{23} = 2947$	$\nu_{23} = 0,42$	$\nu_{32} = 0,17$

При этом считалось, что стеклопластик представляет собой трансверсально изотропный материал и состоит из 19-ти однонаправлено армированных 30-ю нитями/см слоев толщиной 0,25 мм. Количество нитей в слое определялось в результате расчетов и соответствовало экспериментальному значению модуля упругости E_{11}^3 . Относительное объемное содержание арматуры слоя в направлении оси 3 принималось равным $\psi_3^{(k)} = 0,05\psi_1^{(k)}$.

Сравнение результатов, представленных в таблице 1 и полученных авторами работ [8, 9], подтверждает корректность предлагаемой методики определения усредненных технических параметров многослойного композита. Исключение составили физико-механические характеристики трансверсального сдвига и обжатия – G_{13} , G_{23} , E_{33} , ν_{13} , ν_{23} .

2. Обобщенная жесткость многослойного анизотропного пакета по теории С.П.Тимошенко.

Пусть многослойная оболочка состоит из n тонких анизотропных слоев [10]. Каждый слой недеформированной оболочки отнесен к ортогональной криволинейной системе координат α_i ($i = 1, 2$), $z^{(k)}$. Координата $z^{(k)}$ направлена по общей нормали $\vec{m}^{(k)}$ к срединной поверхности $S^{(k)}$ и эквидистантной поверхности $S_z^{(k)}$, k -номер слоя. Индекс « z » при введении других символов означает, что соответствующие величины относятся к точке $(\alpha^1, \alpha^2, z^{(k)})$ эквидистантной поверхности $S_z^{(k)}$.

Принимая обозначения работы [10] и вводя декартову систему координат 1 2 3 таким образом, что плоскость 102 совпадает со срединной плоскостью многослойного элемента симметричной структуры по толщине, закон деформирования всего пакета слоев по теории С.П.Тимошенко определяется соотношениями

$$T = A \varepsilon; \quad \begin{bmatrix} M \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & K \\ K & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} Q^\gamma \\ L^\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & R \\ R & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^\gamma \\ \psi^\gamma \end{bmatrix}, \quad (17)$$

где $T = [T^{11}, T^{22}, Q^3, T^{12}]^T$; $M = [M^{11}, M^{22}, M^{12}]^T$; $L = [L^{11}, L^{22}, L^{12}]^T$; $Q^\gamma = [Q^2, Q^1]^T$; $L^\gamma = [L^{23}, L^{13}]^T$ – отнесенные к единице длины координатных линий недеформированной срединной поверхности многослойного элемента контравариантные компоненты тензоров тангенциальных усилий T^{ij} , изгибающих и крутящих моментов M^{ij} , дополнительного изгибающего и крутящего момента L^{ij} , поперечных сил деформаций сдвига и обжатия Q^i , Q^3 ;

$\varepsilon = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}]^T$; $\chi = [\chi_{11}^\gamma, \chi_{22}^\gamma, \chi_{12}^\gamma]^T$; $\psi = [\psi_{11}, \psi_{22}, \psi_{12}]^T$;
 $\varepsilon^\gamma = [\varepsilon_{23}^\gamma, \varepsilon_{13}^\gamma]^T$; $\psi^\gamma = [\psi_2, \psi_1]^T$ – соответственно компоненты тензоров тангенциальных деформаций ε_{ij} и изменения кривизн χ_{ij}^γ , ψ_{ij} срединной поверхности слоистого материала, а также деформаций поперечного сдвига ε_{i3}^γ , ψ_{i3} и обжатия ε_{33} .

Компоненты матриц жесткости A, D, K, F, C, R, G вычисляются в результате суммирования интегрируемых по толщине оболочки соответствующих жесткостей слоя:

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^n \int_{\delta_{K-1}}^{\delta_K} a_{ij}^{(k)} dz, \quad (i, j = 1, 2, 3, 6); \\
 (D_{ij}, K_{ij}, F_{ij}) &= \sum_{k=1}^n \int_{\delta_{K-1}}^{\delta_K} (z^2, z\varphi(z), \varphi^2(z)) a_{ij}^{(k)} dz, \quad (i, j = 1, 2, 6); \\
 (C_{ij}, R_{ij}, G_{ij}) &= \sum_{k=1}^n \int_{\delta_{K-1}}^{\delta_K} a_{ij}^{(k)} [1, 0, 5\varphi'(z), (0, 25\varphi'(z))^2] dz, \quad (i, j = 4, 5), \quad (18)
 \end{aligned}$$

где $a_{ij}^{(k)}$ – постоянные параметры жесткости k -го слоя, n – количество слоев, $\varphi(z)$ – функция, которая определяет нелинейный характер распределения тангенциальных перемещений по толщине многослойного пакета. Можно представить функцию $\varphi(z)$ в виде

$$\varphi(z) = zf(z) = z[-2z^2 + 3(\delta_0 - \delta_N)z - 6\delta_0\delta_N]/h^3, \quad (19)$$

где $f(z) = [-2z^2 + 3(\delta_0 - \delta_N)z - 6\delta_0\delta_N]/h^3$ – хорошо известная функция, характеризующая параболический закон распределения поперечных касательных напряжений по толщине пакета h . Функция $f(z)$ удовлетворяет условию нормирования – $\sum_{k=1}^n \int_{\delta_{K-1}}^{\delta_K} f(z) dz = 1$.

Используя алгоритм, предложенный в [10], несложно получить зависимости, связывающие деформации и усилия, которые возникают в элементах слоистой структуры при нагружении:

$$\varepsilon = bT; \quad \begin{bmatrix} \chi_{(k)} \\ \psi_{(k)} \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} M_{(k)} \\ L_{(k)} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{(k)}^\gamma \\ \psi_{(k)}^\gamma \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} Q_{(k)}^\gamma \\ L_{(k)}^\gamma \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где b, d, g – матрицы податливости. После несложных преобразований матрицы податливости принимают вид

$$\begin{aligned}
 (b_{ij}) &= (A_{ij})^{-1} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 4); \quad (d_{ij}) = \begin{bmatrix} D & K \\ K & F \end{bmatrix}^{-1} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6); \\
 (g_{ij}^{(k)}) &= \begin{bmatrix} C_{(k)} & R_{(k)} \\ R_{(k)} & G_{(k)} \end{bmatrix}^{-1}; \quad (i, j = 1, 2, \dots, 4). \quad (21)
 \end{aligned}$$

Используя интеграл дополнительной работы деформации $F_p^{(k)}$ функционала Рейсснера [10], можно получить уточненные зависимости физических соотношений (20), (21) для всего пакета слоев в целом.

3. Для проведения экспериментальных исследований были изготовлены пластины размером $0,25 \times 0,25$ м регулярной структуры методом укладки из трех марок стеклотканей (табл. 2).

Таблица 2 – Структура пластин из стеклопластика

№ серии	Количество образцов	Количество слоев	Марка ткани	Толщина ткани, мм	Плотность ткани, нитей/см		Разрывная нагрузка, Н		Толщина образца, мм
					по основе	по утку	по основе	по утку	
1	5	18	ЭЗ-125П ГОСТ 19907-83	0,125	16	16	784	784	$3,0 \pm 0,2$
2	5	16	T-13 ГОСТ 19170-73	0,3	16	10	1764	1176	$5,0 \pm 0,4$
3	5	4	TG 430 – С (производство – Латвия)	0,4	19	11	1557	856	$2,0 \pm 0,2$

Ткани марки ЭЗ-125П и T-13 получены путем переплетения алюмоборо-силикатных ниток БС7-22×1×2 (Е стекло) и БС7-22×1×2 (Е стекло) соответственно. Структура нити ткани марки TG 430 – С аналогична нити стеклоткани T-13. Механические характеристики нити приведены в ГОСТ 19907–83, ГОСТ 19170-73 и равны $E_g = 74500$ МПа; $G_g = 31000$ МПа; $\nu_m = 0,2$.

В качестве полимерной матрицы образцов серий №1 и №2 использовали эпоксидную смолу Э – 20 со следующими параметрами упругости: $E_m = 4200$ МПа; $G_m = 1500$ МПа; $\nu_m = 0,4$. Матрица серии №3 представляла собой полиэфтерную ортофталевую смолу с пониженной эмиссией стирола Cristic 2 – 446 РА (производство – Великобритания) и механическими характеристиками: $E_m = 3400$ МПа; $G_m = 1215$ МПа; $\nu_m = 0,4$.

Связующая композиция первых двух серий образцов включала 100 массовых частей (мас. ч.) эпоксидной смолы Э–20, предварительно прогретой до температуры 70 °С. В приготовленный объем эпоксидной смолы добавляли 10 мас. ч. пластификатора ДЭГ – 1 и 16 мас. ч. отвердителя ТЭАТ – 1 и перемешивали до получения однородной смеси.

После прокаливания стеклоткань пропитывалась разогретым связующим и методом последовательной укладки слоев формовались образцы первых двух серий. Полимеризацию изделий проводили с выдержкой образцов в тер-

мошкафу при температуре 100 °С не менее трех часов.

Отдельно, следует отметить, что слои укладывались под углом 0° и 90° при этом поочередно менялись направления слоев по основе и по утку.

Для образцов третьей серии в качестве связующего использовалась полиэферная ортофталевая смола с пониженной эмиссией стирола Cristic 2 – 446 РА (производство – Великобритания). Время отверждения этой смолы 24 часа при температуре 24 °С. Изготовление образцов третьей серии осуществлялась методом укладки слоев с последующей полимеризацией при температуре 24 °С не менее 36 часов.

Для определения технических постоянных стеклопластика предлагается следующая теоретико-экспериментальная методика. Вначале, согласно ГОСТ 25.601–80, определяется модуль упругости и коэффициент Пуассона при растяжении образцов из стеклопластика. Проведенные механические испытания позволяют утверждать, что материал рассматриваемых пластинок можно классифицировать как трансверсально изотропный.

На растяжение испытывались плоские образцы, которые вырезались из пластин (табл. 1) в направлении главных осей ортотропии и имели следующие размеры: первая серия – $l = 200$ мм; $b = 20,0 \pm 0,2$ мм; $h = 3,0 \pm 0,2$ мм, вторая серия – $l = 200$ мм; $b = 20,0 \pm 0,4$ мм; $h = 5,0 \pm 0,4$ мм, третья серия – $l = 200$ мм; $b = 20,0 \pm 0,2$ мм; $h = 2,0 \pm 0,2$ мм. Каждая партия включала 5 образцов.

Качество плоских образцов, подготовка и проведение испытаний соответствовали требованиям ГОСТ 25.601–80. Определение деформаций двух партий образцов первой и второй серии проводилась методом тензометрирования при помощи разрывной машины в сертифицированной лаборатории Сумского государственного университета.

Для измерения деформаций использовались тензорезисторы КФ4П1–3–200. Среднее значение коэффициента тензочувствительности равно – $K = 2,0 \cdot 10^{-6}$. Наклейка тензорезисторов осуществлялась согласно инструкции по наклейке АЖВ2.782.001 ТО. Для измерения выходных сигналов тензорезисторов и представления отчетов в цифровом виде использовалась измерительная система СИИТ-3.

Третья партия плоских образцов пластин третьей серии испытывалась в сертифицированной лаборатории механических испытаний Национального технического университета Украины «КПИ». При помощи универсальной испытательной машины TIRATEST–2151, были получены механические характеристики образцов при растяжении (ГОСТ 25.601–80), сжатии (ГОСТ 25.602–80) и изгибе (ГОСТ 25.604–82).

По результатам измерений определялись усредненные значения напряжений и деформаций, а также доверительные интервалы на основе критерия Стьюдента с заданной вероятностью $1 - \alpha = 0,95$. При этом погрешность аппроксимации S экспериментальной прямой $\varepsilon_1 = \sigma_{11}/E_1$ при растяжении стеклопластика и значения модулей упругости стеклопластика каждой серии (табл. 1) приведены в табл. 3.

Остальные механические характеристика стеклопластика (табл. 3) определялись интегрально для всего пакета слоев пластинки по предложенной вы-

ше методике при помощи зависимостей (1) – (16).

Для определения предельных напряжений образцы каждой серии доводили до разрушения при испытании на растяжение (ГОСТ 25.601–80), сжатие (ГОСТ 25.602–80) и изгиб (ГОСТ 25.604–82). Считая, что найденные значения предельных напряжений представляют собой нормально распределенную генеральную совокупность параметров, в табл. 4 приведены доверительные интервалы среднего значения предельных напряжений $\pm a_{\text{ср}}$ при доверительной вероятности $1 - \alpha = 0,95$.

Таблица 3 – Упругие характеристики стеклопластиков

№ серии	Результаты эксперимента		Экспериментально – теоретические значения			
	E_{11} , МПа	S , %	E_{ii} , МПа	G_{ii} , МПа	ν_{ij}	ν_{ji}
1	11500	0,85	$E_{11} = 11400$ $E_{22} = 11400$ $E_{33} = 5160$	$G_{12} = 2120$ $G_{13} = 2100$ $G_{23} = 2100$	$\nu_{12} = 0,12$ $\nu_{13} = 0,4$ $\nu_{23} = 0,4$	$\nu_{21} = 0,12$ $\nu_{31} = 0,166$ $\nu_{32} = 0,166$
2	12200	0,72	$E_{11} = 12100$ $E_{22} = 12100$ $E_{33} = 6331$	$G_{12} = 2176$ $G_{13} = 2060$ $G_{23} = 2060$	$\nu_{12} = 0,13$ $\nu_{13} = 0,41$ $\nu_{23} = 0,41$	$\nu_{21} = 0,15$ $\nu_{31} = 0,21$ $\nu_{32} = 0,21$
3	15000	0,97	$E_{11} = 15000$ $E_{22} = 15000$ $E_{33} = 7689$	$G_{12} = 2554$ $G_{13} = 2187$ $G_{23} = 2187$	$\nu_{12} = 0,12$ $\nu_{13} = 0,41$ $\nu_{23} = 0,41$	$\nu_{21} = 0,12$ $\nu_{31} = 0,21$ $\nu_{32} = 0,21$

Таблица 4 – Экспериментальные значения предельных напряжений

№ серии	$\sigma_{11}^+ = \sigma_{22}^+$, МПа	$\pm a_{\text{ср}}$, МПа	$\sigma_{11}^- = \sigma_{22}^-$, МПа	$\pm a_{\text{ср}}$, МПа	$\sigma_{11}^u = \sigma_{22}^u$, МПа	$\pm a_{\text{ср}}$, МПа
1	180	6	180	7	150	5
2	180	8	180	6	150	4
3	200	7	180	8	160	4

Как отмечается в работе [9] разброс экспериментальных значений предельных разрушающих напряжений поперечного сдвига и обжатия достаточно большой, что в первую очередь связано с особенностью строения армированных пластиков, трудоемкостью и сложностью проведения эксперимента.

Вывод. В работе предложена экспериментально-теоретическая методика определения упругих постоянных и характеристик обобщенной жесткости пакета армированных слоев. Приведены физико-механические характеристики основных компонент стеклопластика – стекловолокна, конструкционных стеклотканей и вяжущих материалов (эпоксидная смола или полиэфирная ортофталевая смола), дана краткая характеристика технологии изготовления образцов. На основе методов математической статистики определены доверительные интервалы экспериментально полученных средних значений модуля упругости и предела прочности стеклопластика при растяжении и сжатии, предела прочности стеклопластика при изгибе.

Список литературы: 1. Алфутов Н.А., Зиновьев, Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М: Машиностроение, 1984. – 264 с. 2. Болотин В.В., Новицкий Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с. 3. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. – К.: Наукова думка, 1971. – 304 с. 4. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопоставление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с. 5. Скудра А.М., Булавс Ф.Я., Роценс К.А. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков. – Рига: Зинатне, 1971. – 239 с. 6. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. – Рига: Зинатне, 1969. – 274 с. 7. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с. 8. Кучер Н.К., Немцов М.П., Заразовский М.Н. Деформирование слоистых эпоксидных композитов, армированных одно направленными волокнами и тканью сатинового переплетения // Проблемы прочности. – 2006. – № 1. – С. 41-58. 9. Кучер Н.К., Заразовский М.Н. Оценка прочности слоистых эпоксикарбо-волоконитов, армированных одно направленными волокнами // Проблемы прочности. – 2006. – № 6. – С. 95-112. 10. Верещака С.М. К дискретно-структурной теории многослойных оболочек с дефектами структуры // Вестник НТУ «ХПИ». Сборник научных трудов. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХПІ», – 2004. – № 31. – С. 39-46.

Поступила в редколлегию 25.05.2008.

УДК 539.3

Ю.С.ВОРОБЬЕВ, докт.техн.наук; **А.В.КОЛОДЯЖНЫЙ**, канд.техн.наук;
А.В.ЯРЫЖКО; ИПМаш НАН Украины, Харьков

СКОРОСТНОЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ УДАРЕ

Приводиться аналітичне дослідження динамічного напружено-деформованого стану замкнутої циліндричної оболонки при контактному ударі за допомогою інтегральних перетворень з координатах і часу. Розв'язка отримана методами, які використовують підхід, запропонований у роботах Є.Г.Голоскокова і А.П.Філіппова.

Analytical investigation of dynamics stress-strain state of reserved cylindrical shell under contact shock is fulfilled integral transforms on coordinates and time. The solution is obtained by method, which takes approach in works of E.G.Goloskokov and A.P.Filippov.

Динамическое напряженно-деформируемое состояние цилиндрической оболочки при ударном нагружении твердым деформируемым телом с учетом волнового характера процесса деформирования представляет большой интерес. Ее решение позволяет оценить поведение и прочность реальных конструкций с ударными взаимодействиями.

В работах Е.Г.Голоскокова и А.П.Филиппова [1,2] предложен оригинальный подход к решению данной задачи, которая состоит в использовании интегральных преобразований или разложений и итерационного решения функционального уравнения удара С.П.Тимошенко относительно контактного давления. Развитие данного метода позволяет учесть волновой характер деформирования при динамическом контактом взаимодействии ударника и оболочки, переход деформаций в упруго-пластическую стадию и динамические свойства материала.